4.

Trigonometría*

1. Conocemos de un triángulo rectángulo sus tres lados $9, 12, 15$. Calcula las razones trigonométricas de sus ángulos agudos.

2. Un alumno observa en un determinado momento del día, que su sombra es de 45 cm, y la del Instituto es de $3,5$ m. Sabe que su altura es $1,65$ m. ¿Cuál es la altura del Instituto?

3. Sabemos que $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ y que α está en el primer cuadrante. Calcula las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

4. Sabemos que $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{2}$ y que α está entre $180°$ y $270°$. Calcula el resto de las razones trigonométricas del ángulo α.

5. Sabemos que $\sec\alpha = \dfrac{5}{4}$ y $270° \leq \alpha \leq 360°$. Calcula el resto de las razones trigonométricas del ángulo α.

6. ¿Puede existir un ángulo α tal que $\operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha$? En caso afirmativo dibújalo en un triángulo rectángulo.

7. Sabemos que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{5}$, y α está en el primer cuadrante. Halla:

   a) $\operatorname{tg}(90-\alpha)$. b) $\operatorname{sen}(180-\alpha)$.
   c) $\cos(180+\alpha)$. d) $\operatorname{cotg}(-\alpha)$.

8. Simplifica las expresiones trigonométricas:

   a) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha}\cos^2\alpha$. b) $(1-\operatorname{sen}^4\alpha)\sec^2\alpha$.
   c) $(\dfrac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha)\operatorname{cotg}\alpha$.

9. Utilizando las razones trigonométricas de los ángulos notables y sabiendo que $\operatorname{sen}50° = 0{,}766$, halla las razones trigonométricas de $5°, 10°, 20°$ y $40°$.

10. Si α y β son ángulos del 1^{er} cuadrante, y $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2}, \cos\beta = \dfrac{2}{3}$. Halla el valor de:

    a) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. b) $\cos(30+\beta)$. c) $\operatorname{sen}(\beta-45°)$.

11. Simplifica:

*Estos ejercicios han sido extraídos del libro de bachillerato MATEMÁTICAS I de la EDITORIAL LA Ñ, cuyos autores son Francisco Benítez, Juan Luis Romero, Eloy Fernández, José Manuel Díaz, Alfredo Domínguez y Octavio Ariza. Se recomienda su lectura para la realización de estos ejercicios.

a) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha}$. b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha} + \cos 2\alpha$.

12. Transforma los siguientes productos en sumas:

a) $\operatorname{sen} 6\alpha \cos\alpha$. b) $\cos 30 \operatorname{sen} 5$. c) $\operatorname{sen}\dfrac{75}{2}\operatorname{sen}\dfrac{25}{2}$.

13. Simplifica: $\dfrac{\operatorname{sen} 5\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha - \operatorname{sen}\alpha} - 2\cos 2\alpha$

14. Resuelve las ecuaciones trigonométricas:

a) $4\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x = 0$. b) $\cos x - \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{-3}{4}$.
c) $\operatorname{sen}(\dfrac{\pi}{3} + 2x) = \dfrac{1}{2}$.

15. Resuelve los sistemas de ecuaciones, encontrando las soluciones en el primer cuadrante:

a) $\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cos y = \dfrac{3}{2} \\ 2\operatorname{sen} x - \sqrt{2}\cos y = 0 \end{cases}$

16. Demuestra que las siguientes igualdades, son identidades:

a) $\operatorname{sen} 2x = 2(1 - \cos^2 x)\operatorname{cotg} x$.
b) $\operatorname{sen}^2 x(1 + \cos^2 x) + \cos^4 x = 1$.

17. Di si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} = \cos\alpha$.
b) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \sec\alpha \operatorname{cosec}\alpha$.

18. Sabemos que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}$ y $0 \leq \alpha \leq 90°$. Halla las razones trigonométricas de $(90° + \alpha)$.

19. Halla las razones trigonométricas de $(270° - \alpha)$ y $(270° + \alpha)$ en función de las razones del ángulo α. Represéntalas en la circunferencia goniométrica.

20. Demuestra que $\dfrac{\sec x - \cos x}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg}^3 x$ es una identidad.

21. Demuestra que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$.

22. Demuestra que $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$.

23. Demuestra que $\dfrac{1 - \cos(\alpha+\beta)}{2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

24. Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \\ \operatorname{sen}(3x - 2y) = \cos(x+y) \end{cases}$$

25. Demuestra que si $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, entonces se verifica:
   a) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.
   b) $\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\gamma+\operatorname{cotg}\gamma\operatorname{cotg}\alpha=1$.

26. Demuestra que si $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$, entonces se verifica:
   a) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1$.
   b) $\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\gamma=\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\gamma$.

27. Resuelve la ecuación $\operatorname{sen}x+\operatorname{tg}x=\cos x+\operatorname{cotg}x$.

28. Resuelve el sistema:
$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=2 \end{cases}$$